Министерство образования Московской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

Московской области

«Подольский колледж имени А.В. Никулина»

Методическая разработка урока-практикума

по предмету «Математика»

на тему: «Треугольники»

разработал: преподаватель Козлова Н.Е.

Подольск

2016 г.

Тема урока: Треугольники

Тип урока: Урок-практикум.

Цель урока:

1) Научиться вычислять величины углов или отрезков, площади треугольников.
2) Вызвать интерес у учащихся
3) Научить мыслить творчески. Показать межпредметную связь.

Оборудование:

1) Записи ключевых формул на доске.
2) Карандаши, маркер, цветные мелки.
3) Карточки задания для каждого учащегося для обучающей самостоятельной работы.

План урока:

1) Подготовительный момент – 5 мин.
2) Работа у доски и на местах с объяснением каждого шага – 12 мин.
3) Обучающая самостоятельная работа – 12 мин.
4) Итог – 4 минуты.
5) Домашняя творческая самостоятельная работа – 2 мин.

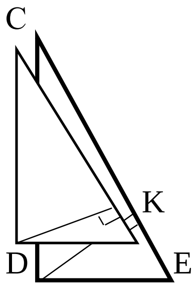
Ход урока:

В задачах, относящихся к теме «Треугольники», требуется вычислить величины углов или отрезков, площади треугольников. Для их решения требуется использовать определения и свойства углов различных видов (острых, тупых, прямых, вертикальных, смежных и т.д.), признаки равенства треугольников, свойства треугольников различных видов (равнобедренного, прямоугольного и др.), их медиан, высот и биссектрис, находить равные и подобные треугольники, уметь вычислять площадь треугольника разными способами. Поэтому полезно иметь под рукой учебник или справочник.

Наиболее просто задачи на вычисление сторон, углов и площадей решаются в прямоугольных треугольниках. Для «решения» прямоугольных треугольников необходимо знать, что

1) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора)
2) Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе, косинус – отношению прилежащего катета к гипотенузе, тангенс – отношению противолежащего угла катета к прилежащему.
3) Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов или половине произведения гипотенузы и проведенной к ней высоты, или половине произведения гипотенузы, катета и синуса угла, заключенного между ними.

Перечисленным утверждениям соответствуют следующие формулы.



Пусть в треугольнике CDE CE = d, EM = c, CD = e, $\angle D = 90°$, $DK \perp CE$ и DK = h. Тогда

1) $d^{2} = e^{2} + c^{2}$
2) sin C = $\frac{c}{d}$, cos C = $\frac{e}{d}$, tg C = $\frac{c}{e}$ (tg C = $\frac{\sin C}{\cos C}$)
3) S = 0,5 $c\ e$, S = 0,5 $d\ h$, S = 0,5 $d\ s \cdot$ sin E

Полезно также помнить, что синус одного острого угла прямоугольного треугольника равен косинусу другого его острого угла, например, sinC = cosE, cosC = sinE. Полезно так же помнить основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$. По этой формуле, зная синус острого угла прямоугольного треугольника, можно найти его косинус, и наоборот.

Если условия задачи позволяют установить, что данный треугольник прямоугольный, то вычисления неизвестных элементов становятся проще.

Признаком прямоугольного треугольника служит, например, теорем, обратная теореме Пифагора: «Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник прямоугольный».

Еще одним признаком является равенство суммы двух углов треугольника 90°.

Пример 1. В треугольнике ABC ∠C = 90º, sinA = 0,6, AC = 8. Найдите AB.

Решение. Стороны AB и AC связаны с углом A соотношением:

$$\frac{\text{AC}}{\text{AB}} = \cos A$$

Значит, чтобы найти AB, нужно вычислить cosA. Используя основное тригонометрическое тождество, получим: $0{,}6^2 + \cos^2 A = 1$. Откуда cosA = $\pm\sqrt{1 - 0{,}6^2}$. Косинус острого угла положительный, следовательно, cosA = 0,8.

Из формулы получаем: $\frac{8}{\text{AB}}$ = 0,8. Откуда AB = $\frac{8}{0{,}8}$ = 10.

Ответ: 10.

Пример 2.

В треугольнике KMT KM = 15, MT = 12, TK = 9. Найдите высоту треугольника, проведенную к его больше стороне.

Решение.

Поскольку $12^2 + 9^2 = 15^2$, треугольник KMT является прямоугольным, а его гипотенуза – наибольшая сторона KM – равна 15. Используя две формулы площади прямоугольного треугольника, получаем: $0{,}5 \cdot 15 \cdot h = 0{,}5 \cdot 12 \cdot 9$. Отсюда h = $\frac{12 \cdot 9}{15}$ = 7,2.

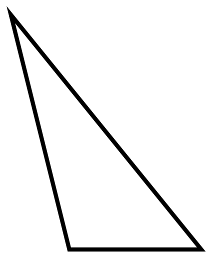
Ответ: 7,2.

Наиболее важными для решения произвольных (не прямоугольных) треугольников являются три теоремы:

1) Теорема косинусов.

2) Теорема синусов.
3) Теорема Герона.

Перечисленным утверждением соответствуют следующие формулы.



Пусть в треугольнике CDE CE = d, DE = c, CD = e. Тогда

1) $d^2 = c^2 + e^2 - 2\,c\,e\cos D$.
2) $\frac{sinC}{c} = \frac{sinD}{d} = \frac{sinE}{e}$.
3) $S = \sqrt{p(p-c)(p-d)(p-e)}$, где $p = \frac{c+d+e}{2}$.

Пример 3.

В треугольнике ABC $\angle B = 135^o$, $AB = 3\sqrt{2}$, AC = 5. Найдите площадь треугольника.

Решение. Пусть BC = x. Тогда по теореме косинусов получаем:

$AC^2 = AB^2 + x^2 - 2AB \cdot x \cdot \cos B$.

Подставив данные, получим:

$5^2 = (3\sqrt{2})^2 + x^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot x \cdot \cos 135^o$,

Т.е $25 = 18 + x^2 + 6x$ или $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Корни уравнения – числа 7 и 1. Следовательно, длина стороны BC равна 1.

Применив формулу $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$, найдем площадь треугольника:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

Пример 4.

В треугольнике ABC $AB = \sqrt{6}$, BC = 2, $\angle C = 60^o$. Найдите градусную меру угла B.

Решение. Известны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Требуется найти угол, противолежащий третьей стороне.

По теореме синусов можно найти угол A, противолежащий второй из данных сторно, а затем, вычитая из 180^o сумму углов A и C, получим искомый угол B.

Итак, $\frac{\sqrt{6}}{sin60^\circ} = \frac{2}{sinA}$, откуда $\sin A = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, значит,

$\angle A = 45^o$ или $\angle A = 180^o - 45^o = 135^o$.

Поскольку в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а $\sqrt{6 > \sqrt{4}} = 2, \text{т. е } AB > BC, \text{то } \angle C > \angle A$. Следовательно, угол A не может быть тупым, и поэтому он равен 45^o.

Тогда $\angle B = 180^o - (60^o+45^o) = 75^o$.

Ответ: 75^o.

В задачах о треугольниках часто рассматриваются высоты, медианы и биссектрисы. В равностороннем треугольнике все три отрезка, проведенные из одной вершины, совпадают. В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, совпадают.

Все три медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины. Например, если отрезки AM, BK и CN – медианы треугольника ABC, то AO : OM = BO : OK = CO : ON = 2:1.

Все три биссектрисы треугольника также пересекаются в одной точке, и каждая биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Например, если отрезок AA_1 – биссектриса треугольника ABC, то $A_1B : A_1C = AB:AC$.

Важно помнить, что медианы и биссектрисы всегда пересекаются во внутренней точке треугольника. Прямые, содержащие высоты остроугольного треугольника, пересекаются во внутренней точке, а тупоугольного – во внешней.

Пример 5.

Площадь равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равна 160, боковая равна 20. Высота BK и AH пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABO.

Решение.

$S_{ABC} = 0{,}5BK\cdot AC$, значит, $BK = \frac{2\cdot 160}{20} = 16$.

$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.

Высота AH равнобедренного треугольника ABC является его биссектрисой, следовательно, AO – биссектриса треугольника ABK. Поэтому

$\frac{KO}{OB} = \frac{AK}{AB}$, а значит, $\frac{KO}{OB} + 1 = \frac{AK}{AB} + 1$ и $\frac{BK}{OB} = \frac{AK+AB}{AB}$.

Отсюда получаем $\frac{16}{OB} = \frac{32}{20}$, т. е. $OB = 10$.

Т.к AK – высота треугольника ABO,

$S_{ABO} = 0{,}5BO\cdot AK = 0{,}5\cdot 10\cdot 12 = 60$.

Ответ: 60.

Домашняя работа.

1. В треугольнике BCD $\angle D = 90^o$, BC = 26, $\cos C = \frac{12}{13}$. Найти CD.
2. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60^o$, AB = 8, BC = 7. Найдите периметр треугольника.
3. В треугольнике ABC AB = 17, BC = 15, AC = 8, отрезок AO – биссектриса треугольника. Найдите площадь треугольника ABO.